Analiza funkcjonalna
Lista 3

Zad 1. Niech $K \in L_2([0,1]\times[0,1])$. Udowodnić, że operator $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ zdefiniowany wzorem

$$(Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

jest operatorem ciągłym.

Zad 2. Niech $\mathcal{D}(A) = \{x = (x(n)) \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty}(nx(n))^2 < \infty\}$. Czy operator liniowy $A : \mathcal{D}(A) \to l_2$ zadany wzorem

$$A(x(1), x(2), ...) = (x(1), 2x(2), 3x(3), ...)$$

jest operatorem ciągły?

Zad 3. Niech $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ oraz $\|x\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)|$. Udowodnić, że

a) operator $\frac{d}{dt} : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_1) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ jest operatorem ograniczonym i wyznaczyć jego normę.

b) operator $\frac{d}{dt} : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ nie jest operatorem ograniczonym.

Zad 4. Wyznacz normę operatora $A : l_p \to l_p$ zadanego wzorem
a) $Ax = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$
b) $Ax = (x(1), x(3), x(5), x(7), ...)$
c) $Ax = (x(2), x(3), x(4), ...)$
d) $Ax = (\frac{1}{3}x(1), \frac{1}{3^2}x(2), ..., \frac{1}{3^n}x(n), ...)$
e) $Ax = (2x(1), \frac{9}{4}x(2), ..., (\frac{n+1}{n})^n x(n), ...)$

Zad 5. Wyznaczyć normę funkcjonału $Tx = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i)$ określonego na przestrzeni ciągłych funkcji rzeczywistych $C[a,b]$; $c_i \in \mathbb{R}$, $t_i \in [a,b]$. Rozważyć przypadek, gdy $C[a,b]$ jest przestrzenią ciągłych funkcji zespolonych; $c_i \in \mathbb{C}$, $t_i \in [a,b]$.

Zad 6. Wyznaczyć normę operatora liniowego $A : C[a,b] \to C[a,b]$ zadanego formułą $(Ax)(t) = tx(t)$, dla $x \in C[a,b]$.

Zad 7. Wyznaczyć normę funkcjonału $Tx = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$ w przestrzeni $C[-1,1]$.

Zad 8. Wyznaczyć normę funkcjonału $Tx = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$ w przestrzeni $L_p(-1,1)$, dla $p \in [1,\infty]$.

Zad 9. Wyznaczyć normę operatora $(Ax)(t) = tx(t)$, gdy

a) $A : C[-1,1] \to L_p(-1,1),\ \ 1 \le p < \infty$,

b) $A : L_p(-1,1) \to L_1(-1,1),\ \ 1 \le p < \infty$,

c) $A : L_{p_2}(-1,1) \to L_{p_1}(-1,1),\ \ 1 \le p_1 < p_2 < \infty$.